

Scientific Electronic Archives

Issue ID: Sci. Elec. Arch. Vol. 12 (1)

February 2019

Article link

<http://www.seasinop.com.br/revista/index.php?journal=SEA&page=article&op=view&path%5B%5D=642&path%5B%5D=pdf>

Included in DOAJ, AGRIS, Latindex, Journal TOCs, CORE, Discoursio Open Science, Science Gate, GFAR, CIARDRING, Academic Journals Database and NTHRYS Technologies, Portal de Periódicos CAPES.



Teoria dos Jogos: Uma abordagem através da história e suas aplicações

Game Theory: An approach through history and its applications

W.A.V. Souza, M.C. Malavazi

Universidade Federal de Mato Grosso – Campus Sinop

Author for correspondence: welliton-a.s@hotmail.com

Resumo. A Teoria dos Jogos é uma abordagem matemática para o estudo de tomadas de decisões entre indivíduos quando cada resultado depende das decisões dos outros, ou seja, não se deve tomar uma decisão arbitrária, mas decidir com base no que pensa que será a decisão de seu “oponente”, sabendo que ele pensa o mesmo. Desenvolvida por John von Neumann e Oskar Morgenstern em 1944 no livro *Theory of Games and Economic Behavior*, ela foi muito contestada desde seu lançamento, porém, os trabalhos de um gênio chamado John Nash, laureado com o prêmio Nobel de economia em 1994, pôs fim a essas contestações. Este trabalho evidencia que a Teoria dos Jogos não se limitou ao campo da economia, mas se expandiu a outras áreas, como biologia, explicando estratégias utilizadas por espécies para sobreviverem. Como resultados são apresentados mais de dez modelos fundamentados nos princípios da Teoria dos Jogos, dentre eles o Dilema do Prisioneiro, o Jogo do Sorveteiro, a Lei Cidade Limpa e o Canto de Aviso entre Pássaros.

Palavras-chave: História da Teoria dos Jogos, Aplicações da Teoria dos Jogos, John von Neumann, John Nash, Dilema do Prisioneiro.

Abstract. Game Theory is a mathematical approach to the study of decision making between individuals when each outcome depends on the decisions of others, ie, one should not make an arbitrary decision, but decide based on what they think the decision of their "opponent" will be, knowing that they think the same. Developed by John von Neumann and Oskar Morgenstern in 1944 in the book *Theory of Games and Economic Behavior*, it had been very contested since its launch, but the works of a genius named John Nash, winner of the Nobel Prize in economics in 1994, ended these contestations. This work shows that the Game Theory was not limited to the field of economics, but expanded to other areas, such as biology, explaining strategies used by species to survive. As results are presented more than ten models based on the principles of Game Theory, among them the Prisoner's Dilemma, Ice Cream Vendors Game, Clean City Law and Warning Song between Bird.

Keywords: History of Game Theory, Applications of Game Theory, John von Neumann, John Nash, Prisoner's Dilemma.

Introdução

Teoria dos Jogos é um modelo matemático que busca descrever o comportamento entre indivíduos de acordo com suas escolhas, segundo Pereira (2014) podemos descrever que:

A Teoria dos Jogos é uma técnica utilizada para analisar situações de conflito com a participação de dois ou mais indivíduos (ou instituições), onde o resultado da ação de um deles depende não apenas da ação feita pelo próprio indivíduo, mas também das ações tomadas pelo outro ou outros. (PEREIRA, 2014).

Fazendo uso de uma pesquisa do tipo revisão de literatura narrativa, procuramos por meio

de livros, artigos, dissertações, teses e outros, evidenciar os conceitos que envolvem a Teoria dos Jogos, através da sua história e de suas aplicações. O diferencial para esse trabalho é a forma na qual as informações são expostas, com linguagem simples e objetiva, buscamos levar ao leitor o melhor entendimento dessa teoria, tanto para leigos, como para leitores de graduação e pós-graduação.

Entre os objetivos estão: abordar a história da Teoria dos Jogos, detalhando a biografia de seus principais precursores (John von Neumann e John Nash); o que é a Teoria dos Jogos, explicando o porquê foi chamada de Teoria “maldita”, explicitando também o Dilema do Prisioneiro, a noção de Matriz de pay-offs e, a repetição de rodadas em um jogo; e por fim, trazemos diversos princípios e aplicações da Teoria dos Jogos, tanto na economia, como no

marketing, na sobrevivência, no cotidiano e na biologia evolutiva.

Esse projeto faz parte do PIBIC/VIC (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica/Voluntariado de Iniciação Científica), desenvolvido na UFMT (Universidade Federal de Mato Grosso - campus universitário de Sinop) entre os autores. O projeto do PIBIC/VIC é o de “*Teoria dos Jogos Aplicada ao Problema de Chamado de Alarme*”, onde a primeira fase é o de revisão de literatura e divulgação científica da Teoria dos Jogos, abordando sua história e as aplicações pertinentes.

Métodos

Partindo de uma pesquisa do tipo revisão de literatura, buscamos em livros, artigos científicos, dissertações e outros, conceituar a Teoria dos Jogos como um todo. Para possibilitar uma linguagem acessível aos leitores, norteamos a pesquisa através de uma revisão narrativa, que segundo o manual da Biblioteca Prof. Paulo de Carvalho Mattos, da UNESP Campus de Botucatu, ela:

Não utiliza critérios explícitos e sistemáticos para a busca e análise crítica da literatura. A busca pelos estudos não precisa esgotar as fontes de informações. Não aplica estratégias de busca sofisticadas e exaustivas. A seleção dos estudos e a interpretação das informações podem estar sujeitas à subjetividade dos autores. (UNESP, 2015).

A escolha por esse estilo de pesquisa se dá pelos diversos materiais existentes sobre a Teoria dos Jogos, porém, cada material produz análises pontuais, ou, utiliza-se de uma linguagem extremamente complexa. Buscamos simplificar o contexto da teoria, permitindo uma melhor compreensão a todos os leitores iniciantes na área.

Resultados e Discussões

Nesta seção apresentamos o contexto geral da Teoria dos Jogos, iniciando com a discussão do que é a Teoria dos Jogos, elucidando o Dilema dos Prisioneiros e os jogos com Repetições de rodadas; abordamos também os estudiosos que, ao longo da história, trabalharam com a Teoria dos Jogos, como: Neumann e Nash; e por fim, apresentamos diversas aplicações da Teoria dos Jogos, em variadas áreas, como na economia, no marketing e na biologia evolutiva.

O Que é Teoria Dos Jogos?

Teoria dos jogos é um modelo matemático baseado na interação entre indivíduos concorrentes em um jogo, fazendo com que a decisão de cada participante influencie na decisão de seu oponente. Assim como afirma Santos (2003):

A Teoria dos Jogos é uma teoria matemática criada para se modelar fenômenos que

podem ser observados quando dois ou mais “agentes de decisão” interagem entre si. Ela fornece a linguagem para a descrição de processos de decisão conscientes e objetivos envolvendo mais do que um indivíduo. (SANTOS, 2003).

Embora a Teoria dos Jogos tenha sido criada sobre o pilar da economia no livro *Theory of Games and Economic Behavior* (Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico) em 1944, hoje ela se expande em diversas áreas de estudo, como: sociologia, psicologia, biologia, administração, sociobiologia, matemática pura e aplicada, entre diversas outras. O fato é que, a Teoria dos Jogos pode se aplicar a inúmeros contextos a nossa volta, utilizando-se de apenas matemática básica, sem necessidade de uma matemática mais complexa.

Desde sua origem a Teoria dos Jogos sofreu diversas refutações, não sendo realmente aceita até o Prêmio Nobel de John Forbes Nash Jr. em 1994. Marinho (2011) diz “Entendido como um conjunto de princípios, é também esse o sentido aplicado à outra teoria “maldita” que iremos abordar: a Teoria dos Jogos”. Ele não a chama de maldita à toa, em seu livro *Prática na Teoria* ele apresenta todos os argumentos que caracterizam a Teoria dos Jogos como tal, que são:

- Obscurantismo da matemática: por ser uma ferramenta matemática utilizada para modelar comportamentos;
- Teoria da Evolução: outra teoria “maldita” (Robert L. Trivers em *The Evolution of Reciprocal Altruism (A Evolução do Altruismo Recíproco)* de 1971 reuniu a Teoria da Evolução com a Teoria dos Jogos), pois entra em contraste com a ideia do criacionismo;
- A Teoria da Evolução diz que a espécie mais forte (melhor adaptada) sobrevive, segundo o criacionismo a espécie mais fraca deve prevalecer;
- Se chamar “TEORIA” dos jogos, nesse caso é mais pelo vocábulo, dando a entender que na Teoria é assim, mas na prática não;
- Implicações éticas: por querer identificar comportamentos através de cálculos matemáticos;
- Tachada entre matemáticos por se desviar da matemática pura; por cientistas sociais por não admitirem estudar comportamentos através de cálculos e; por hermeneutas que dizem que todo comportamento advém da cultura;
- A Teoria da Evolução e dos Jogos “propagam” o egoísmo e o individualismo (como o Dilema dos Prisioneiros), ao contrário da religião que sempre prega o altruísmo, a cooperação;
- A palavra “Jogo” em seu nome, dando a entender jogo esportivo como futebol e vôlei, ou jogo de baralho como truco e pôquer, ou jogo de objetos como panelas e Tupperware, enfim, diversos tipos de jogos, menos o matemático;
- Seus principais precursores eram “loucos”:

- Neumann quis destruir a União Soviética com bombas atômicas antes que eles o fizessem (o governo não aceitou);
- Nash sofria de esquizofrenia como retrata o livro e o filme de sua biografia.

Embora a Teoria dos Jogos tenha sido atacada durante vários anos (como vimos nos tópicos anteriores), ela persistiu e ganhou forma, ganhou aplicações em outras áreas, mostrando assim sua veracidade e, mostrando também, que ela pode ser usada para descrever o comportamento humano, comportamento de empresas rivais, de espécies de animais na natureza, assim como outras aplicações.

Marinho apud Morgenstern (2011), chama atenção para a importância da Teoria dos Jogos, como podemos observar no trecho a seguir:

A Teoria dos Jogos é matéria nova, que despertou grande interesse em razão de suas propriedades matemáticas inéditas e de suas múltiplas aplicações a problemas sociais, econômicos e políticos. (MARINHO apud MORGENSTERN, 2011).

Os autores vão além, mostram o grande diferencial que a Teoria dos Jogos propicia no estudo de fenômenos sociais, evidenciando que a natureza desses é melhor compreendida pelos princípios da Teoria dos Jogos, quando comparada com a abordagem clássica utilizada. De fato,

Suas aplicações têm se tornado cada vez mais numerosas e dizem respeito a questões altamente significativas enfrentadas pelos cientistas sociais, devido ao fato de que a estrutura matemática da teoria difere profundamente de anteriores tentativas de propiciar fundamento matemático aos fenômenos sociais, os primeiros esforços em tal sentido foram feitos com base nas ciências físicas e se inspiraram no impressionante êxito por elas alcançado ao longo dos séculos. Ocorre, porém, que os fenômenos sociais são diferentes: os seres humanos algumas vezes lutam um com os outros e algumas vezes cooperam entre si; dispõem de diferentes graus de informação acerca do próximo, e suas aspirações os conduzem ou ao conflito ou à colaboração. A natureza inanimada não exhibe nenhum desses traços. Átomos, moléculas, estrelas podem aglomerar-se colidir, explodir, mas nunca se hostilizam, nem colaboram entre si. Consequentemente, era de se duvidar que os métodos e conceitos desenvolvidos pelas ciências físicas pudessem lograr êxito quando aplicados a problemas sociais. (MARINHO apud MORGENSTERN, 2011)

Uma das melhores maneiras de entender como funciona e como trabalhar a Teoria dos Jogos

é através do Dilema do Prisioneiro, que veremos a seguir.

Dilema dos Prisioneiros

O Dilema dos Prisioneiros foi idealizado por Merrill Flood e Melvin Dresher em 1950 e, foi Albert William Tucker que adaptou e fez sua divulgação. O Dilema funciona perfeitamente para explicar o desenvolvimento e a modelagem matemática por trás da Teoria dos Jogos, além de esclarecer diversas situações do nosso cotidiano, assim como declara Barrichelo (2017):

O Dilema dos Prisioneiros é um dos jogos mais famosos no mundo da Teoria dos Jogos – apresenta a história de dois prisioneiros e o dilema entre trair e cooperar. Na prática, esse jogo representa várias situações da vida cotidiana ou corporativa em que, embora a colaboração entre os prisioneiros (jogadores, pessoas) proporcione resultados melhores, individualmente a melhor escolha é trair, prejudicando a todos. (BARRICHELO, 2017).

Para melhor interpretação do Dilema, é necessário que pense racionalmente, deixando de lado que os jogadores tenham algo afetivo, religioso ou moral. Enfim, vamos ao Dilema.

Certo dia, dois criminosos (X e Y) se encontram na rua e decidem assaltar a principal padaria do bairro em que vivem, localizada na próxima esquina da rua em que estavam. No momento do ato (roubo) são abordados em flagrantes pela polícia local e levados em silêncio à delegacia. Chegando na delegacia são presos em celas separadas, no mesmo instante lhes foram dadas duas opções: se calar ou confessar (é importante lembrar que desde o assalto na padaria, os prisioneiros não tiveram nenhuma relação). Para cada opção (calar ou confessar) foram atribuídas penas, que são:

- Se X e Y se calarem, cada um ficará um ano preso;
- Se X e Y confessarem, cada um ficará dois anos presos;
- Se X confessar e Y ficar quieto, X sairá livre da prisão e Y ficará preso durante 5 (cinco) longos anos;
- Se X ficar quieto e Y confessar o crime, é Y quem sai livre e X que aguardará 5 (cinco) anos para sua liberdade.

Estruturando essas opções para melhor visualização e interpretação, vamos montar uma matriz, a matriz de *pay-offs* (Matriz de ganhos).

Tabela 1. Matriz de *Pay-offs* para o jogo Dilema dos Prisioneiros

Matriz de Pay-offs (Matriz de ganhos)			
		Prisioneiro X	
		Confessar	Calar
Prisioneiro Y	Confessar	2 anos <u>2 anos</u>	5 anos <u>Liberdade (0)</u>
	Calar	Liberdade (0) <u>5 anos</u>	1 ano <u>1 ano</u>

Analisando a matriz acima, fica óbvio que a melhor opção são os dois prisioneiros se calarem e ficarem apenas 1 (um) ano preso. Porém, para que os dois fiquem calados, deve haver extrema confiança um no outro, pois, se X confiar em Y e se calar, pode ser que Y não confie em X ou que ele queira “ferrar” com X e confessar; dessa forma Y sai livre e X fica 5 (cinco) anos preso, o mesmo acontece no caso contrário.

Agora entraremos na parte do Equilíbrio de Nash, onde os jogadores pensando racionalmente irão encontrar a melhor solução para o seu problema (isso pensando no jogo com apenas 1 (uma) rodada, no próximo tópico, veremos o jogo com repetição de rodadas).

Vamos imaginar que somos o prisioneiro X; eu tenho duas opções: me calar ou confessar. Bom, se eu me calar, pode ser que eu fique apenas um 1 (um) ano preso ou que eu fique 5 (cinco) anos presos, o que seria horrível para mim. Se eu confessar, pode ser que eu saia livre ou pegue 2 (dois) anos de detenção. Eu devo evitar ficar esses 5 (cinco) anos preso, então não posso me calar, pois confessando, o pior que pode acontecer é eu ficar 2 (anos), o que já é melhor que 5 (cinco), ou pode acontecer de eu sair livre, o que seria excelente.

Analisando todas as opções, a escolha que iria **maximizar** os ganhos e **minimizar** as perdas seria confessar, e não ficar calado; disso advém o nome anterior atribuído à Teoria dos Jogos, de Teorema Mini-Max.

O prisioneiro X resolve confessar, o que o levaria a sair livre ou ficar 2 (dois) anos preso. Nesse momento, ele pensa o que seu comparsa faria; ele chega à conclusão de que seu comparsa estaria pensando igual a ele, portanto, ele confessaria. Com isso, o prisioneiro X fica em um beco sem saída, pois não deve ficar quieto de jeito nenhum; no final, acabaria confessando e ficando 2 (dois) anos preso. Esse é o *Equilíbrio de Nash*, a melhor decisão possível levando em consideração a decisão que o outro irá tomar.

Repetição de Rodadas

O Dilema do Prisioneiro aplicado a apenas uma rodada do jogo, sugere a melhor opção confessar. Mas, se os prisioneiros confiam um no outro e ainda querem fazer coalizões futuras, a melhor opção seria a cooperação entre eles. Para o

jogo com repetição de rodadas, a Teoria dos Jogos pega como base o *tit-for-tat* (*olho por olho*), de que, eu ajudo quem me ajuda, e eu traio quem me trai. Vamos imaginar que o jogo entre os prisioneiros tivesse 7 (sete) rodadas, que eles tivessem sido presos 7 (sete) vezes. A melhor opção para eles seria ficarem calados, pois assim ficariam 1 (um) ano preso por cada vez que foram pegos, $1+1+1+1+1+1+1=7$, resultando 7 anos de prisão, mas, se algum deles decide desertar um do outro, ou seja, confessar, já na primeira rodada, nunca mais obteria a confiança do outro, $0+2+2+2+2+2+2=12$, e o resultado seria 12 anos de detenção.

Portanto, levando em conta a expectativa de continuar a parceria de roubo (rodadas futuras), o melhor seria se calar, e cooperar com seu comparsa.

Personagens da História

Comentaremos agora os heróis (personagens) que, ao longo de várias décadas formalizaram a Teoria dos Jogos.

- James Waldegrave forneceu uma solução para um jogo de cartas, vindo a formar o equilíbrio de estratégia mista;
- Augustin Cournot desenvolveu um modelo de duopólio;
- Ernst Zermelo publicou o primeiro teorema matemático sobre a teoria;
- Emile Borel reelaborou as soluções minimax;
- John von Neumann desenvolveu a análise dos jogos de soma zero;
- Oskar Morgenstern, parceiro de Neumann no desenvolvimento do livro “Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico”;
- John Forbes Nash Jr. apresentou o equilíbrio de Nash.

Nessa pesquisa iremos tratar em especial dos dois considerados mais importantes para essa teoria, Neumann e Nash, ambos descritos em filmes de Hollywood e este segundo laureado com o prêmio Nobel de economia em 1994.

John von Neumann

Nascido em 28 de dezembro de 1903 em Budapeste na Hungria, John von Neumann se naturalizou estadunidense na década de 30; infelizmente veio a falecer em 8 de fevereiro de 1957, por um tumor no cérebro. Tornou-se um dos personagens mais importantes da matemática, contribuindo ativamente na 2ª guerra mundial com sua Teoria dos Jogos, conforme afirma Nascimento (2014):

Em 1944 a Teoria dos Jogos surgiu formalmente com a publicação do livro The Theory of Games and Economic Behavior (Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico) do matemático John Von

Neumann e do economista Oskar Morgenstern. Nesta obra os autores desenvolveram a análise dos jogos de soma zero (jogos em que o ganho de um jogador representa necessariamente uma perda para o outro). Através da aplicação desses tipos de jogos, problemas militares poderiam ser resolvidos, por isso eles tiveram grande impacto durante a 2ª guerra mundial. (NASCIMENTO, 2014).

Em 1930, já no Estados Unidos, torna-se professor visitante na Universidade de Princeton (Nova Jersey) e, em 1933, virou membro permanente do Instituto de Estudos Avançados de Princeton, devido aos seus estudos tanto na área da Teoria dos Jogos, como à Teoria dos Operadores e à Teoria Quântica. Sua contribuição à 2ª guerra mundial se deu pelos projetos da bomba atômica, bomba de hidrogênio e a previsão numérica do tempo. Simon (1996) cita cronologicamente os principais marcos da carreira de Neumann:

1903 Nasce, Budapest, Hungria, 28 de dezembro.
1930-33 Professor visitante, Universidade de Princeton.
1933-57 Professor de Matemática, Instituto de Estudo Avançado, Princeton, N.J.
1937 Conferencista Gibbs, Conferencista acadêmico, Prêmio Bôcher, todos na Sociedade Americana de Matemática.
1940-57 Comitê Consultivo Científico, Laboratórios de Pesquisa Balística, Campo de Provas de Aberdeen, Maryland.
1941-54 Departamento de Material Bélico da Marinha, Washington, D.C.
1943-55 Laboratório Científico de Los Álamos (AEC), Los Álamos, N.M.
1945-57 Diretor do Projeto do Computador Eletrônico, Instituto de Estudo avançado, Princeton, N.J.
1947 D.Sc. (hon.), Universidade de Princeton; Medalha por Mérito (prêmio presidencial); Prêmio por Serviços Cívicos Notáveis, Marinha dos EUA.
1947-55 Laboratório Naval de Material Bélico, Silver Spring, Maryland.
1949-53 Conselho de Pesquisa e Desenvolvimento, Washington, D.C.
1949-54 Laboratório Nacional de Oak Ridge, Tennessee.
1950 D.Sc. (hon.), Universidade de Pennsylvania e Universidade de Harvard.
1950-55 Projetos de Armamentos Especiais das Forças Armadas, Washington, D.C.; Grupo de Avaliação de Sistemas de Armamentos, Washington, D.C.
1950-57 Membro da Junta de Conselheiros, Universidades de Los Andes, Colômbia, América do Sul.
1951-53 Presidente, Sociedade Americana de Matemática.

1951-57 Conselho Científico, Força Aérea dos EUA, Washington, D.C.
1952 D.Sc. (hon.), Universidade de Istambul, Instituto Case de Tecnologia e Universidade de Maryland.
1952-54 Membro, Comitê Consultivo Geral, Comissão de Energia Atômica dos EUA, Washington, D.C. (nomeação presidencial).
1953 D.Sc. (hon.), Instituto de Politécnica, Munique; Conferencista Vanuxem, Universidade de Princeton.
1953-57 Painel Técnico-Consultivo sobre Energia Atômica, Washington, D.C.
1955-57 Delegado de Energia Atômica dos EUA (nomeação presidencial).
1956 Medalha da Liberdade (prêmio presidencial); Prêmio Comemorativo Albert Einstein; Prêmio Enrico Fermi.
1957 Morre, Washington, D.C., 8 de fevereiro. (SIMON, 1996).

John von Neumann também tinha associações em diversas instituições, como:

- Academia Nacional de Ciências Exatas em Lima (Peru);
- Academia Nacional de Artes e Ciências;
- Academia Nacional de Lincei em Roma (Itália);
- Academia Nacional de Ciências.
- Real Academia de Ciências e Letras da Holanda em Amsterdam (Holanda);
- Sociedade Americana de Filosofia;
- Instituto Lombardo de Ciências e Letras em Milão (Itália).

John Forbes Nash Jr.

Nascido em 13 de junho de 1928 em Bluefield, West Virginia, nos Estados Unidos, John Nash trabalhou com a Teoria dos Jogos, desenvolvendo o Equilíbrio de Nash, trabalhou também com geometria algébrica, lógica e topologia. Infelizmente veio a óbito em 23 de maio de 2015 em um acidente de carro.

Seu pai, também chamado John, era engenheiro elétrico e sua mãe Virginia, professora, sendo professora particular de Nash durante sua infância, o que muito lhe ajudou em sua formação. Dois anos depois nasce sua irmã Martha.

Durante seu período no colégio, ele não era dado como um futuro gênio, mas sim, como um aluno totalmente antissocial. Gostava de estudar sozinho, isso o levou a aprender mais em casa do que na própria escola, e também a detestar o ensino na escola. Durante seu período no colegial, fez um curso de matemática na Universidade de Bluefield, porém, sua carreira universitária iniciou-se no curso de química em 1945 na Universidade de Carnegie Mellon, mas logo desanimou-se do curso e passou a estudar matemática; Nash também fez um curso de “Economia Internacional”, o que o ajudou no estudo da Teoria dos Jogos. Devido ao seu desenvolvimento, quando se formou em Carnegie Mellon, já se formou com um mestrado,

posteriormente quis obter um doutorado em matemática, com isso seu professor da universidade lhe deu uma carta de recomendação com os seguintes dizeres: “Ele é um gênio matemático”.

No programa de doutorado, John Nash foi aceito em duas universidades norte-americanas: Harvard e Princeton, e sua preferência foi em Princeton, se interessando por teoria dos jogos, geometria algébrica, lógica e topologia. Durante seus estudos em Princeton, Nash não comparecia às aulas, e preferia estudar sem auxílio de livros e de professores, para garantir ideias originais.

Na teoria dos jogos, Nash continuou a partir do momento que Neumann e Morgenstern tinham parado, publicando em 1951 “*O problema da Barganha*”, porém, esse trabalho não foi aceito como sua tese de doutorado, e ele acabou conquistando seu doutorado com outro trabalho, assim como afirma Marinho (2011):

Nash trabalhou a partir do ponto em que Neumann e Morgenstern haviam parado em sua teoria e, como resultado, publicou O problema da barganha em 1951, momento em que apresentou sua conclusão, batizada de “equilíbrio de Nash”. A despeito da auto-homenagem do invento, esse trabalho não foi aceito em Princeton como tese de doutorado, e Nash acabou conquistando seu título de doutor com outro trabalho – sobre variantes matemáticas. (MARINHO, 2011)

Após sua formação, Nash foi trabalhar na *Rand Corporation*, uma empresa do departamento de defesa dos Estados Unidos; lecionou em Princeton durante um ano, após isso, foi para a Universidade de MIT (Massachusetts Institute of Technology) lecionar matemática. Durante essa época de trabalho no MIT, entre 1951-1959, fez diversos avanços na matemática, inclusive em um problema clássico não solucionado, da geometria diferencial. Além dos avanços matemáticos, nesse período sua esquizofrenia começou se agravar, e também, em 1953 Nash teve um filho com Eleanor Stier, no qual o chamou de John David Stier, mas Nash não chegou a casar com Eleanor.

Em 1954 Nash foi detido pela polícia, vítima de perseguição homossexual, isso fez também com que ele fosse expulso da Rand. Em 1957 Nash casa-se com Alicia, uma estudante de física formada em MIT, no qual teve outro filho. Pouco tempo depois sua esquizofrenia tornou-se paranoica, fazendo com que ele saísse do posto em MIT e fosse internado contra sua vontade. Na biografia de Nash contada por Sylvia Nasar (Livro: *Uma mente brilhante*), diz que Nash tentou renunciar sua cidadania estadunidense, no mínimo duas vezes, na França e na Suíça; e Nash também se proclamou imperador da Antártida.

Com o passar dos anos, aos poucos foi se recuperando da esquizofrenia, isso fez com que voltasse a lecionar em Princeton como professor de matemática. Em 1994 ganha o prêmio Nobel de

economia ao lado de John C. Harsanyi e Reinhard Selten pelo seu trabalho na Teoria dos Jogos, o vídeo do recebimento do Nobel está disponível no Youtube. Em 2002 Hollywood resolve produzir um filme retratando a vida de John Nash, *Uma Mente Brilhante*, ganhador do oscar de melhor filme, com direção de Ron Howard.

No dia 19 de maio de 2015 Nash recebe na Noruega o prêmio Abel (o ‘Nobel’ da matemática) pelas suas contribuições fundamentais para a teoria das equações e as derivadas parciais não-lineares, e sua aplicação na análise geométrica. Ao pousar em solo americano no dia 23 de maio de 2015, ao lado de sua esposa Alicia, pegou um táxi rumo sua casa, infelizmente o táxi acabou batendo em uma mureta na estrada, e por falta de cinto de segurança, acabaram lançados pelo carro, vindo a falecer no local do acidente.

Aplicações

Nesta seção apresentamos um conjunto de princípios e problemas da Teoria dos Jogos, adaptados de Marinho (2011) e Barrichelo (2017).

Tragédia dos Comuns ou Tragédia dos Baldios

A Tragédia dos Comuns/Baldios é uma modelagem onde se expande o Dilema do Prisioneiro para grupos. Através do princípio da Tragédia dos Comuns/Baldios a situação fica muito mais real, mais coincidente com a vida no cotidiano, pois nem sempre as tomadas de decisões são em dois indivíduos; geralmente as relações expandem esse número de duas pessoas. Vamos à Tragédia.

Tudo começou com a utilização das terras por um grupo de pastores na idade média. Naquele tempo haviam diversos terrenos baldios aonde os pastores levavam seu gado para pastar, mas, em um pedaço de terra, há um limite de cabeças de gado que deve ser posto, caso esse limite seja ultrapassado, o pasto se torna insuficiente para o gado, levando futuramente a morte por falta de alimento. Independente do pastor, é benéfico colocar mais uma cabeça no pasto, mesmo que futuramente o pasto venha a sumir, prejudicando a todos; aliás, nenhum outro pastor irá notar aquele gado a mais, até porque, se ele não colocar o gado a mais dele, outro pastor irá fazer isso. O problema aumenta porque todos pensam dessa maneira, levando a situação realmente a uma tragédia.

Leilão de Dólar

Esse jogo foi idealizado por Martin Schubik na década de 70.

Leiloa-se uma nota de 1 (um) dólar, o lance mínimo deve ser de 1 (um) centavo de dólar e os participantes não devem combinar jogadas e nada do tipo. Assim como um tradicional leilão, quem der o maior lance ganha o dólar, mas, quem der o segundo maior lance também deve pagar, mas não ganha o 1 (um) dólar. Exemplo: Se o maior lance for de 40 (quarenta) centavos, esse ganhador paga 40 (quarenta) centavos e ganha 1 (um) dólar, com lucro de 60 (sessenta) centavos; se o segundo maior

lance for de 30 (trinta) centavos, esse participante terá apenas prejuízo; a banca do leilão irá receber 70 (setenta) centavos e pagar 1 (um) dólar, com prejuízo de 30 (trinta) centavos.

O melhor que os participantes poderiam fazer é alguém dar um lance de 1 (um) centavo e ninguém mais jogar, e depois dividir o dólar entre todos, porém, as regras não permitem combinações. No início do leilão o ambiente é respeitoso, porém, quando os lances alcançam 50 (cinquenta) centavos, o ambiente já se torna desconfortável, pois a partir dali a banca do leilão começa a lucrar. Quando os lances ultrapassam o 1 (um) dólar o bom ambiente anterior se degenera, nesse momento os participantes não estão preocupados em ganhar, mas sim, em perder menos. Em média, o leilão termina com três dólares e quarenta centavos, mas há casos que ultrapassam os dez dólares.

Dilema do Lobo

Esse dilema já foi testado diversas vezes por pesquisadores, e o resultado sempre foi o mesmo.

Em uma grande sala contém 20 cabines isoladas, onde irão vinte participantes diferentes; em cada cabine contém um grande botão vermelho, que quando apertado, dispara uma sirene. O objetivo do jogo é que os participantes fiquem 15 (quinze) minutos dentro da cabine sem apertar o botão; caso não apertem, cada um ganha mil dólares, porém, se alguém apertar, ele leva cem dólares para casa e os demais não ganham nada.

Fica claro que a melhor opção é todos colaborarem e ninguém apertar o botão, mas, se você é um participante, fica com medo de que algum dos outros possa apertar, fazendo você não ganhar nada naquele jogo. Todas as vezes que esse Dilema foi testado, sempre houve um participante que apertou o botão.

Conta na Lanchonete

Uma empresa de automobilismo resolve dar férias coletivas no final do ano aos seus funcionários. No último dia de trabalho do ano, um grupo de funcionários resolvem ao sair da empresa ir em um restaurante fazer uma confraternização entre eles, serão cerca de 20 (vinte) funcionários. Vamos supor que você é um dos funcionários. Todos recebem o cardápio no mesmo instante e começam a analisá-lo. Você percebe que o valor do peixe à parmegiana é R\$40,00 e o valor do X-tudo é R\$15,00. Se você pedir o peixe e todos seus colegas pedirem o lanche, o custo total será de: $19 \times 15,00 + 40,00 = R\$325,00$; ou, R\$16,25 para cada um. Dessa forma, você economizará R\$23,75 e seus colegas terão um acréscimo de R\$1,25. Você diz que está tudo bem, porque seus colegas não vão se importar em pagar apenas R\$1,25 a mais. Porém, na mesa, você não é o único que pensará em maximizar seus ganhos, os outros também pensarão, e com isso, todos pedirão o peixe, mesmo quem quisesse comer o lanche.

Programação de TV

Esta aplicação da Teoria dos Jogos tem como princípio o Leilão de Dólar.

Podemos notar que os programas de televisão são geralmente “grudados” um nos outros; notamos também que o primeiro bloco, ou parte, de um programa é o mais interessante e também o mais longo; tudo isso para induzir o telespectador a “entrar no leilão”. Depois disso, as chances para que ele continue assistindo o programa é grande; depois de 20 (vinte) minutos, o telespectador rompe a barreira do “1 (um) dólar e acaba assistindo o programa até o fim; podemos comparar com assistir um filme no cinema, depois de assistir o começo do filme, por pior que ele seja, você o assistirá até o fim.

Vaga de Emprego

Essa aplicação demonstra o porquê pessoas mais velhas tem dificuldade em arrumar um emprego.

Em uma grande empresa de eletrodomésticos, o profissional de recrutamento e seleção tem dois currículos proporcionais em suas mãos, a única diferença é que um é de uma pessoa de 22 (vinte e dois) anos e o outro de uma pessoa de 61 (sessenta e um) anos de idade. Para escolher quem contratar o recrutador se pergunta quem teria mais chance de processar a empresa: quem está começando a carreira profissional ou quem está quase se aposentando? Pensando racionalmente e sem motivação por cunho afetivo, religioso ou moral; o candidato mais novo teria menos chance de processar a empresa, pois está em início de carreira, e um processo trabalhista poderia lhe prejudicar em conseguir um novo emprego; o candidato mais velho teria menos preocupação em processar a empresa, pois está nas “rodadas finais” de seu jogo (profissão), e não temeria um processo contra a empresa. Por motivos racionais, o candidato mais novo seria contratado.

Por mais que seja difícil aceitar essa conclusão, essa é a nossa realidade.

Dilema da Ponte

Você está sendo perseguido por um assaltante, quando se depara com um imenso rio, nesse momento você vê o assaltante do outro lado do rio e começa a correr em sua margem, até despistá-lo. Em um certo trecho você vê uma placa que diz: à frente se encontram 3 (três) pontes, uma com passagem livre, a outra com desmoronamento de rochas em alguns instantes e, a última com serpentes peçonhentas; as pontes estão separadas a uma distância considerável e, do outro lado do rio contém a mesma placa.

Nesse momento você começa a pensar em atravessar a ponte livre, pois não terá chance de morrer por serpentes e nem por rochas, mas, você lembra que o assaltante também viu a placa e também pensará em ir te esperar na ponte livre. Então, você muda de ideia e decide ir na ponte com

desmoronamento, pois tem menos chance de morrer do que ir pelas serpentes, mas, assim como você pensou que o assaltante iria na ponte mais fácil, ele também pensou que você mudaria de ideia, pois era óbvio ir naquela ponte; você raciocina que ele também iria na ponte com rochas. Então decide arriscar em ir pela ponte das serpentes que é o que o assaltante menos esperaria, mas, se você pensou isso, ele também pensaria a mesma coisa.

Para esse dilema, você deve fazer o que seu oponente menos espera, porém, o que você acha que ele menos espera, é o que ele esperará mais. Aqui você está preso em uma indecisão, o que te alivia é pensar que o assaltante também está preso na mesma indecisão.

O Jogo do Ultimato

Essa aplicação explica porque preferimos justiça e cooperação ao invés do auto interesse racional.

O jogo ocorre em uma sala que possui duas cabines, duas pessoas que não se conhecem ocupam as cabines. O jogo é o seguinte: o valor em disputa é 100 (cem) dólares, uma das pessoas será responsável por dividir o dinheiro, e a outra apenas vai dizer 'sim' ou 'não' em receber aquele valor que foi dividido, se ela disser sim, ela pega seu montante e o outro indivíduo também, se ela disser não, nenhum dos dois ganha nada; o jogo tem apenas uma rodada e a escolha de quem divide é tirado no cara e coroa. Por exemplo: é tirado cara e coroa e o participante W é escolhido para dividir os 100 (cem) dólares, ele divide 70 (setenta) dólares para ele e 30 (trinta) para seu oponente Z; Z deve dizer se aceita seus trinta dólares e W com setenta, ou se ele não aceita e nem W e Z ganham nada.

Inicialmente, o mais lógico a fazer é dividir pela metade, 50% para cada, o que seria mais justo; mas, o que te levaria a não aceitar os trinta dólares e sair sem nada, pelo seu oponente sair com setenta dólares? Porque rejeitar um valor qualquer no jogo, sendo que você sairá ganhando de qualquer maneira? É melhor sair sem nada do que o outro com um valor maior?

Já testado diversas vezes em vários ambientes e culturas diferentes, chega-se a alguns resultados: dois terços dos que dividem ofereceram de 40 a 50%; 4% ofereceram menos que 20% e; para ofertas menores que 20%, mais da metade dos que respondem rejeitaram a proposta.

A opção mais racional seria aceitar qualquer valor, até porque 2 (dois) dólares já é melhor do que nada, mas, o senso de justiça varia nessa situação, levando o indivíduo a agir mais pela emoção do que pela razão.

Empresas vs. Meio Ambiente

Essa aplicação tem como base o princípio da Tragédia dos Comuns.

Em uma grande metrópole existem milhares de indústrias, usinas, fábricas, manufaturas que de uma forma ou outra poluem o meio-ambiente. Nessa metrópole possui uma lei que limita a

quantidade de gases poluentes que cada empresa deve "jogar" na atmosfera, porque a partir de um ponto, o ar ficará irrespirável, e o aumento da temperatura é dada como certa.

Mas como você é um grande empresário, com extremos interesses em lucrar mais, aumentar a produção de sua empresa irá lhe gerar muito mais lucros, mesmo que futuramente isso possa lhe gerar algum dano; e ninguém irá notar se estiver poluindo um pouco a mais do que deve, até porque a fiscalização não é tão severa, e se você não aumentar sua produção, seu concorrente pode fazer.

O problema, ou tragédia, acontece porque cada empresa irá ter o mesmo pensamento, levando a saúde coletiva da população em geral ao caos devido ao ar poluído, ao aumento da temperatura, a poluição dos rios e lençóis freáticos, entre diversos outros. No fim toda a população terá que procurar outra cidade para morar dentro de poucos anos.

Lei Cidade Limpa

Essa aplicação utiliza um regulador central que age em prol dos dois jogadores.

Na cidade de São Paulo (Brasil) existe a lei Cidade Limpa, que é vigente desde 2007. Antes da lei ser sancionada existia uma guerra de propaganda visual, onde os comerciantes inseriam em suas lojas, letreiros cada vez maiores, gerando uma poluição visual enorme e deixando suas logomarcas sem serem devidamente notadas.

Se um comerciante aumentasse seu letreiro, seu concorrente também faria o mesmo, isso levaria a uma guerra sem fim, onde nenhum dos dois sairia ganhando no final, e a paisagem visual da cidade ficaria completamente horrorizada. Para solucionar esse conflito, que tem como base o Dilema dos Prisioneiros, a prefeitura da cidade de São Paulo agiu como regulador central limitando o tamanho dos letreiros de cada loja, que a partir de então é de 4 (quatro) metros quadrados e até 5 (cinco) metros de altura.

As lojas (jogadores) não conseguiam cooperar entre si, precisou de um regulador central para "forçar" essa cooperação; ao fim, a lei foi de extrema eficácia.

Jogo do Sorveteiro

Esse jogo é para explicar porque lojas concorrentes sempre se localizam próximas umas das outras em vez de ficarem distantes. Lojas de móveis, supermercados, lojas de roupas, postos de gasolina, sempre se localizam, geralmente, próximas de seus concorrentes. Pensamos que o melhor seria ficarem distantes, para diminuir a concorrência e aumentar os negócios, porém não é isso que acontece.

Vamos imaginar uma praia de 80 metros de extensão, e que nesta praia possuem apenas 2 (dois) sorveteiros, que vendem o mesmo tipo de sorvete, da mesma marca, mesmo sabor e tenham os mesmos preços. Na praia eles estão localizados

a 20 (vinte) metros de cada borda. O único incentivo para comprar em um ou no outro é a localização de cada um. Como estão bem distribuídos na praia, cada um está com 50% dos clientes. A tendência é que um ou o outro comece se movimentar para o centro, em busca de ocupar mais espaço na praia. Vamos supor que o sorveteiro A comece a ir para o centro enquanto o sorveteiro B fique na mesma posição, em um dado dia e instante, o sorveteiro B se dará conta que o A está ocupando uma enorme parte na praia, e irá trocar de posição; iniciará então, uma disputa por espaço na praia, em busca de conquistar o maior número de clientes. De tanto andarem para um lado e outro na praia, o equilíbrio irá se dar quando ambos estiverem lado a lado exatamente no centro da praia, sem nenhuma jogada a mais para sair “vencedor”.

Esse raciocínio explica porque as empresas concorrentes se encontram lado a lado em uma parte da cidade, mesmo com o aumento aparente da competição.

Dilema do Salva-Vidas

As aplicações Dilema do Salva-Vidas, Simbiose de Limpeza Entre Peixes e, Canto de Aviso Entre Pássaros (são as aplicações que veremos a seguir), referem-se à aplicação da Teoria dos Jogos na biologia. Para esse estudo no campo da biologia evolutiva, requer um trabalho inteiro desenvolvido a ele devido sua complexidade; como não é o objetivo deste trabalho, iremos abordar de maneira simples e resumida essas aplicações.

O princípio da Teoria dos Jogos utilizado para a biologia evolutiva é o Dilema dos Prisioneiros, e alguns autores que atuam nesse campo são: Robert L. Trivers, William D. Hamilton, Richard Dawkins e, Martin A. Nowak; além de Charles Darwin, com a Teoria da Evolução, servindo como pilar para esses autores. Vamos ao dilema.

Vamos supor que você esteja passeando na margem de um rio e se depara com uma pessoa se afogando; você é o salva-vidas na situação. Essa cena sofre duas ramificações, depende de quem está se afogando, podendo ser um parente ou um desconhecido. Suponhamos que seja um parente, o que levará você a salvá-lo? O nosso gene é “programado” a sua perpetuação, ele não quer “morrer”, por esse motivo, a cooperação de parentesco (entre parentes) se dará por não deixar seu gene sumir; caso você não salve seu parente (o ser que carrega uma parte do mesmo gene que o seu), as chances de sua extinção serão maiores do que se você o salvar. Agora suponhamos que seja um desconhecido, quais motivos o levam a salvá-lo? A perpetuação do gene e da espécie humana na corrida da evolução. Ao você fazer o salvamento daquele afogando, as chances de ele retribuir o ato (salvar um desconhecido) no futuro serão maiores, isso irá agir em seu gene, fazendo desenvolver um comportamento altruísta, e como a seleção natural age a favor dos mais aptos no ambiente, o gene altruísta irá permanecer e evoluir, enquanto os indivíduos (genes) que não adquiriram esse

comportamento tendem a sua extinção. Caso esse afogando que você salvou não retribua o ato no futuro, em um ambiente repleto de genes altruístas, esse gene cheater (trapaceiro) não irá evoluir e será extinto. Na corrida da evolução, se o gene cheater evoluir e o altruísta ser extinto, toda a sociedade humana tende a ruir também.

Simbiose de Limpeza Entre Peixes

A simbiose também pode ser entendida como um ato altruísta, onde os dois indivíduos se beneficiam. Como essa aplicação ocorre com espécies de peixes diferentes, constata-se que a limpeza é um ato altruísta e não, uma seleção pelo parentesco.

Nesse contexto, existem dois tipos de peixes: os limpadores (cerca de 50 (cinquenta) espécies existentes, incluindo camarões) e os hospedeiros (inúmeras espécies). Os peixes hospedeiros permitem que os limpadores entrem em sua boca para realizar a limpeza, mas porque não os come? E porque os limpadores continuam fazendo esse serviço? Segundo análises, no estômago dos limpadores foi detectado uma dependência por ectoparasitas presentes na boca de hospedeiros, e nos estômagos dos hospedeiros foi detectado que eles não se alimentam dos peixes limpadores.

Os peixes de limpeza geralmente possuem algo peculiar, como uma coloração diferente, e durante a limpeza geralmente ambos os peixes apresentam movimentos rítmicos, isso evita que os limpadores sejam engolidos; o mecanismo de seleção natural agiu de uma forma com que esses peixes fossem selecionados. Se os hospedeiros se alimentassem dos limpadores, os limpadores entrariam em extinção ou, abandonariam esse comportamento, independentemente da situação, o hospedeiro sairia prejudicado, pois necessita da limpeza de sua boca; constatou-se que alguns peixes hospedeiros que não sofreram limpeza, em pouco tempo feridas e machucados apareceram em sua boca.

Canto de Aviso Entre Pássaros

Algumas espécies de aves emitem um canto de aviso de perigo quando avistam um predador, ele faz isso para avisar seus “parentes” de espécie sobre a presença de um inimigo. Esse canto é especial, pois impede que o inimigo (predador) saiba sua exata localização e torna-se confuso.

Geralmente, o pássaro emissor do canto acaba sendo morto pelo predador ou, por algum outro predador à espreita. Mas se ele acaba sendo morto na hora do canto de perigo, a seleção natural não deveria tirar esse comportamento dos pássaros?

Os cantos de alerta ocorrem em especial na estação de acasalamento, auxiliando a sobrevivência da espécie; fora da estação de acasalamento também há ocorrência, pois, todo o bando sai beneficiado. É mais benéfico para o indivíduo que emite o canto, que o predador ataque

a ele do que, atacar um outro da espécie próximo a ele, porque nesse caso, o predador tomaria essa espécie como uma boa presa, e isso não é útil para a espécie; em geral, uma determinada área que possui um emissor de canto, é mais segura do que aquela que não possui, e a espécie que não possui emissores de perigo, tendem a ficar mais vulneráveis, fazendo com que o mecanismo da evolução a dispense.

Para essa aplicação é utilizado o conceito de cooperação por parentesco, inverso à aplicação anterior que é do altruísmo recíproco.

Conclusão

Neste estudo pudemos notar a rica história que a Teoria dos Jogos carrega, desde seus primórdios demonstrando como empresas atuam na economia a até, o estudo do gene e do comportamento de animais (incluindo a espécie Homo Sapiens).

Carvalho (1957) chega a dizer:

Há menos de trinta anos, von Neumann lançou o seu primeiro ensaio sobre os jogos de estratégia, início de uma teoria cujo grande desenvolvimento apareceu no consagrado volume Theory of Games and Economic Behavior, que, segundo R. Stone, é a mais importante contribuição à Economia desde a publicação da Teoria Geral de Keynes. Embora com resultados ainda insatisfatórios em certos aspectos, suas perspectivas futuras são promissoras. Obra de tal envergadura ultrapassa a capacidade de um só homem e exigirá certamente os esforços devotados de mais de uma geração para erigir-se definitivamente em monumento científico. (CARVALHO, 1957).

Sabemos que a Teoria dos Jogos conseguiu se levantar como monumento científico, ganhando o prêmio Nobel em 1994 através de John Nash. Assim como Carvalho (1957) acreditava que a Teoria dos Jogos teria um futuro promissor, e teve de fato, sabemos que muito ela ainda pode evoluir, se espalhando a outras áreas de conhecimento, como a física, química, e diversas ciências humanas.

A Teoria dos Jogos é uma excelente ferramenta matemática para modelar o comportamento humano durante as tomadas de decisões, levando em conta seus sentimentos, emoções e prazeres. Mas, não se limita a essa natureza de estudos, pode-se reinterpretar modelos das mais diversas áreas a partir dos princípios da Teoria dos Jogos, ampliando o leque de ferramentas, bem como de resultados propiciados pela consideração de hipóteses de tomada de decisões nesses modelos.

Por fim, a Teoria dos Jogos propicia um novo ambiente de estudos, ampliando o leque de problemas fundamentais da humanidade que

podem ser estudados com o auxílio da matemática, dando respostas a problemas antes inatingíveis pelos princípios clássicos da ciência.

Referências

BARRICHELO, F. Estratégias de Decisão: Decida Melhor com Insights da Teoria dos Jogos. São Paulo, Brasil. 270p. 2017.

UNESP. Tipos de Revisão de Literatura. 2015. <http://www.fca.unesp.br/Home/Biblioteca/tipos-de-revisao-de-literatura.pdf>

CARVALHO, T. M. A Teoria dos Jogos e sua Aplicação à Economia. Revista Brasileira de Economia, v. 11, n. 2, p.17-37. 1957.

MARINHO, R. Prática na Teoria: Aplicações da Teoria dos Jogos e da Evolução aos Negócios. São Paulo, Brasil. 310p. 2011.

NASAR, S. Uma Mente Brilhante. Rio de Janeiro, Brasil. 588 p. 2002.

NASCIMENTO, T. O. Teoria dos Jogos e a Matemática no Ensino Médio: Introdução ao Equilíbrio de Nash. 67f. (Dissertação de Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 2014.

PEREIRA, S. B. Introdução à Teoria dos Jogos e a Matemática no Ensino Médio. 68f. (Dissertação de Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 2014.

SANTOS, P. A. Uma introdução a Teoria dos Jogos. 54f. (Monografia) - Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, Brasil, 2003.

SIMON, I. Von Neumann, o cientista e a figura humana. Revista Estudos Avançados, v.10, n.26, p.179-188. 1996.

Uma Mente Brilhante. Direção: Ron Howard. Longa-metragem. Distribuidor: Universal Pictures do Brasil. EUA. 2002.

YOUTUBE. John Nash (Nobel Prize). 2014. <https://www.youtube.com/watch?v=Vp6sGsNTyWI>