Scientific Electronic Archives | Volume 1 | p. 20-25 | 2012

Demonstração de Cauchy: Compreensão Algébrica

Demonstration of Cauchy: Understanding Algebraic

T.L. Costa+ [1].; L.A. Palaro

[1] Universidade Federal de Mato Grosso – Campus de Cuiabá
+ Autor correspondente: tati.sunshine16@gmail.com

Resumo
Neste estudo apresentamos algumas considerações sobre o Trabalho de Conclusão de Curso de graduação em Licenciatura Plena em Matemática/UFMT, elaborado em 2011 e tendo por título "Uma história sobre Cauchy e o Teorema de Euler sobre poliedros" que deu origem ao nosso projeto de pesquisa de Mestrado em Educação, iniciado em 2012, sobre as abordagens do Teorema de Euler sobre poliedros nos livros didáticos de matemática. No trabalho desenvolvido em 2011 apresentamos algumas considerações sobre a história do Teorema de Euler para poliedros o qual focamos a demonstração apresentada por Cauchy (1789-1857), que tenta generaliza-la, apoiando-se em premissas não observáveis na Geometria Euclidiana. Diante disso, buscamos nas literaturas acessíveis sobre a história da matemática, relacionar alguns aspectos da demonstração de Cauchy com os acontecimentos históricos sobre o desenvolvimento da matemática no século XIX, o que permitiu a aceitação de tal demonstração pelos matemáticos de sua época.
Unitermos: *História da Matemática. Teorema de Euler sobre Poliedros. Demonstração de Cauchy.*

Abstract
In this study we present some considerations about the End of Course Work undergraduate Full Degree in Mathematics / UFMT, drafted in 2011, and by taking title "A story about Cauchy and Euler's theorem on polyhedra" that gave birth to our research project Master of Education, begun in 2012, on the approaches of Euler's theorem on polyhedra in mathematics textbooks. At work in 2011 presented some considerations about the history of Euler's theorem for polyhedra which focus the demonstration presented by Cauchy (1789-1857), who tries to generalize it, relying on assumptions not observable in Euclidean geometry. Therefore, we seek the accessible literature on the history of mathematics; relate some aspects of the demonstration Cauchy with historical events on the development of mathematics in the nineteenth century, which allowed the acceptance of such a demonstration by mathematicians of his time.
Keywords: *History of Mathematics. Euler's Theorem on Polyhedra. Demonstration of Cauchy.*

Introdução

A apresentação de definições, seguidos de teoremas, corolários, proposições e estes seguidos de prova ou demonstração são características dos métodos rigorosos, pois revela a organização de resultados através de outros mais simples, originando uma sequência de argumentos convincentes, denominado de método axiomático. Método que Euclides (que viveu em torno dos anos 300 a.c) adaptou de uma das formas de apresentação aristotélica das ciências científicas em sua obra Os *Elementos*, onde estão reunidos (em treze livros) de maneira inovadora os resultados sobre geometria plana e espacial e também sobre a aritmética (hoje Teoria dos Números). Tomei (2003) assevera que assim como se deu o estudo dos polígonos regulares no plano – como determinar através do lado do polígono considerado, o raio da circunferência inscrita e circunscrita a um polígono regular – os gregos também os estudaram no espaço, os denominados *poliedros regulares* (Livro XIII dos Elementos), provando que ao todo só existem cinco – tetraedro, octaedro, cubo, dodecaedro e icosaedro. E ainda, que o fascínio dos gregos pelos poliedros regulares se deu em função de sua simetria, os quais as faces eram polígonos regulares e o número de faces que se encontravam em cada vértice eram iguais.

Ao longo do tempo, estes continuariam despertando o interesse de grandiosos matemáticos que observariam nessas regularidades propriedades matemáticas das quais eles se debruçariam em prová-las. Um desses matemáticos foi Euler (1707-1783) que partindo do estudo dos sólidos limitados por figuras planas anunciou, em 1752, a propriedade: para *qualquer* sólido que possui V (número de vértices), F (número de faces) e A (número de arestas) aplica-se a relação V-A+F=2. Esta relação foi devida a ele, e por isso, recebeu o nome de relação de Euler. Hoje se sabe esta relação é sempre verdadeira para os *poliedros convexos* (quando não é cortado por qualquer dos planos de suas faces). Todavia, Euler não definiu os sólidos (poliedros) que estudava e nem restringiu aos poliedros convexos, por isso, durante muito tempo, foi alvo de refutações.

Assim, pretendemos apresentar neste estudo a demonstração apresentada por Cauchy (1789-1857) em 1811, em sua obra Oeuvres no texto *Recherches Sur Les Polyèdres*. Cauchy comenta apresentar uma prova geral para a relação de Euler, ou seja, uma prova que abrangesse qualquer tipo de poliedro, afastando a relação dos contraexemplos. Mas, Cauchy para provar a relação apoiou-se em premissas não observáveis na Geometria Clássica ou Euclidiana. Estas premissas "novas" nos levaram a investigar, baseando na história da matemática, quais teriam sido os motivos para a aceitação da demonstração pelos matemáticos no século XIX. Uma vez que, segundo Martines (2009) somente com Simon Antoine Jean Lhuilier (1750-1840) – que apresentaria a definição para poliedros regulares, citando suas propriedades para o qual só existem cinco sólidos regulares e apontando algumas exceções para a relação V-A+F = 2 em seu artigo *Mémoire Sur La Polyédrométrie* em 1812/1813 – que a hipótese de Euler é reformulada, ou seja, o para "qualquer" poliedro da propriedade anunciada por Euler foi substituída por "para todo poliedro convexo", livrando a relação dos contraexemplos.

Demonstração de Cauchy: compreensão algébrica e compreensão geométrica

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) nasceu em Paris. Boyer (1996) destaca que Cauchy não tinha muito interesse pela geometria em suas diversas formas, entretanto, em 1811 (na obra Oeuvres em seu texto *Recherches Sur Les Polyèdres*) apresentou uma generalização para a relação poliedral de Euler. Além disso, Cauchy dava "preferência por matemática pura em forma elegante com a devida atenção a provas rigorosas" (BOYER, 1996). Entretanto, essa preferência, no sentido de uma organização sistemática semelhante aquela da geometria euclidiana não é visível – mas uma tentativa – no desenvolvimento da demonstração para a relação de Euler apresentada por Cauchy, pois não apresentou uma definição para *poliedro* e nem restringiu a relação para os *poliedros convexos* para o qual ela é sempre verdadeira. Em sua obra, para demonstrar a relação de Euler, Cauchy apresentou dois teoremas:

Teorema: Decomponhamos um poliedro em tantos outros, de forma a obter novos vértices em seu interior. Chamaremos de P o número de poliedros novos assim formados, por S o número total de vértices, incluindo os do poliedro original, o número total de faces por F, e o número total de arestas por A então:

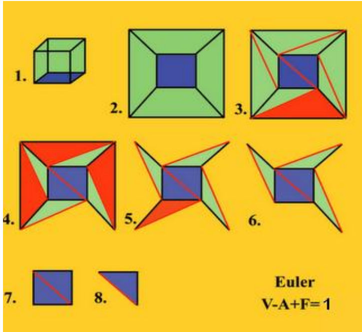
$$S + F = A + P + 1 \quad (1)$$

que representa a soma do número de vértices com o número de faces excedendo por uma unidade a soma do número de arestas com o número do poliedro.

Teorema: Supondo que todo poliedro pode ser reduzido a um único, destruímos neste último, a face que forma a base e projetando no plano todos os outros vértices, obtemos uma figura plana composta de vários polígonos fechados em um dado contorno. Seja F o número destes polígonos, S o número de seus vértices, e A o número de lados, obtemos a relação entre estes três números fazendo P = 0 na fórmula geral, e então temos:

$$S + F = A + 1 \quad (3) \quad \text{(MARTINES, 2009)}$$

e afirma que quando P=1, no primeiro teorema, obteremos a relação de Euler. Para provar o primeiro teorema, Cauchy prova o segundo teorema e diz ser fácil provar partindo do primeiro (mas não o faz). Geometricamente, à semelhança do qual é apresentado por Courant e Robbins (2000) podemos representar a demonstração de Cauchy (prova do segundo teorema) para um caso específico (cubo) como segue:



ou seja, a demonstração de Cauchy consiste em aplicar as seguintes etapas com os poliedros considerados por Cauchy (poliedros convexos): retira-se uma face de um poliedro (de n faces); as arestas livres são esticadas (supondo a superfície poliédrica flexível) projetando as outras faces no plano, obtendo dessa forma um poliedro plano de n-1 faces (rede de polígonos ou grafos no plano). Neste processo, os vértices e arestas correspondem, em número, aos vértices e arestas do poliedro; traçam-se diagonais em todas as faces do poliedro plano; despetala-se o poliedro plano até reduzi-lo a um único triângulo, e isto pode ser feito de dois modos (o triângulo a ser retirado tem uma aresta livre, o triângulo a ser retirado tem duas arestas livres). Ao final da quarta etapa, verificaria o cumprimento da relação V-A+F = 1. Provando-se então a veracidade da relação de Euler. Entretanto, Lima (1991) mostra que há ainda outras possibilidades de remoção das faces do poliedro plano (triângulos) quando o triângulo a ser retirado tem duas arestas livres mas nenhum dos seus vértices é livre, quando o triangulo a ser retirado tem as três arestas livres mas nenhum de seus vértices é livre, quando o triângulo a ser retirado tem três arestas e dois vértices livres ou quando o triângulo a ser retirado tem três arestas e dois vértices livres. (LIMA, 1991, p. 78) Assim, por não ter definido os poliedros e os tipos de poliedros em estudo, e ainda, pela demonstração apresentada por Cauchy estar incompleta (somente com o professor Lima que esta demonstração seria completada utilizando resultados topológicos), do ponto de vista matemático, não constituiria uma demonstração para o teorema.

Acontecimentos históricos sobre o desenvolvimento da matemática: aspectos da demonstração de Cauchy

Antes do século XIX, ou seja antes da época em que foi apresentada a demonstração de Cauchy, a geometria euclidiana era questionada em relação ao postulado das paralelas, em que Euclides definiu como paralelas retas coplanares (situadas no mesmo plano) que por mais que fossem prolongadas nunca se "cruzariam", pois o postulado não tinha "a qualidade, exigida pela axiomática grega, da obviedade ou da pronta aceitabilidade por parte do leitor" (DOMINGUES, 1992). Ainda, segundo Domingues (1992), muitos substutivos foram dados ao postulado, pois questionaram-se se ele era realmente necessário ou se ele pudesse ser considerado como um teorema deduzido dos demais postulados de Euclides. Tomei (2003) assevera que a compreensão do quinto postulado foi dada somente no século XIX pelo húngaro Bolyai (1802-1860) e o russo Lobatchevsky (1793-1856) – tornando o postulado das paralelas independente dos demais postulados da geometria euclidiana – ao perceberem que existe uma geometria alternativa: a *geometria não-euclidiana*. Dentre as geometrias não-euclidianas, a *analysis situs* ou topologia[1] constituiria a base explicativa para a relação de Euler no moderno desenvolvimento sistemático "onde a intuição permanece como a fonte, mas não como a validação final da verdade" (Courant-Robbins, 2000). Segundo Domingues (1992) "a topologia, como disciplina independente, certamente não é anterior a meados do século XIX", mas que se podem destacar pesquisas topológicas anteriores. Exemplo dessas pesquisas é apresentado por Martines (2009) quando relata que Euler, em 1735, teria encontrado a solução do problema das pontes de Königsberg ao perceber que o problema pertencia a uma geometria diferente, entretanto Euler não teria observado o mesmo para a relação V-A+F = 2. Nesse contexto é que podemos apontar alguns aspectos da demonstração de Cauchy: sua descrição não utiliza de figuras, não se baseia na definição de poliedros, possui algumas características semelhantes da *geometria projetiva*[2], e suas premissas não condizem inteiramente com o da geometria clássica.

O primeiro aspecto que apontamos no desenvolvimento da demonstração de Cauchy é a não utilização de figuras nas etapas da demonstração, mas pode-se facilmente imaginar as etapas tomando um poliedro particular. Isso provavelmente se deve ao fato de que Cauchy gostava de ensinar, pois quando comparado a Gauss (1777-1855) – ambos principais matemáticos de seus tempos – segundo Boyer, "havia muito mais de pedagogo em Cauchy" (BOYER, 1996). Além disso, o uso de figuras caracteriza procedimentos intuitivos e é por isso que na geometria clássica, as figuras desempenham um papel importante na estruturação das ideias, pois caso estas fossem suprimidas a demonstração desmoronava-se. Um segundo aspecto da demonstração de Cauchy é que ela não se apoia numa definição e não utiliza dos resultados já conhecidos da geometria Euclidiana. Apesar disso, Cauchy tentou apresentar suas premissas na forma de teoremas que é características dos métodos rigorosos, tendo em vista que "um método rigoroso tem de excluir esse apelo permanente a intuição, exigindo que todas as propriedades supostas sejam enunciadas sob a forma explícita de proposições" (BLANCHÉ, 1978). Assim, infere-se que a preocupação de Cauchy em dispor seus resultados com sistematização semelhante dos métodos rigorosos caracteriza um estilo matemático de Cauchy, pois "ele seguiu a tradição de Lagrange em sua preferência por matemática pura em forma elegante

[1] Estudo das propriedades das figuras geométricas que permanecem invariantes sob as chamadas transformações topológicas – isto é, aplicações bijetorascontínuas cujas inversas também são contínuas (DOMINGUES, 1992, p. 22).

[2] "É o estudo das propriedades das figuras que, traçadas em um plano a partir de uma fonte puntiforme, continuam invariantes" (DIENES, 1978, p. 6).

com a devida atenção a provas rigorosas" (BOYER, 1996). Um terceiro aspecto que podemos observar na demonstração (de Cauchy) geométrica da relação de Euler é que ela possui algumas características comuns com a Geometria Projetiva[3]. Na geometria projetiva do qual conta Dienes (1975), as transformações em que a fonte luminosa ou puntiforme se encontra o mais distante do objeto determinarão uma projeção aproximada do mesmo, pois os raios luminosos irão incidir sobre ele quase que paralelamente (transformação afim - caso particular da transformação projetiva). E se a fonte luminosa estiver o mais próximo do objeto, a projeção do objeto ficará deformada (transformação projetiva). E isto, como diz Lima (1991) pode ser imaginado de uma maneira bastante simples se o poliedro for convexo. Ainda em Dienes (1975), vemos que algumas transformações podem ser desfeitas quando se projeta uma figura plana, porque podemos associar a cada ponto da figura um único ponto da sombra projetada, enquanto outras não podem ser desfeitas quando, por exemplo, se projeta figuras de três dimensões sobre uma figura de duas dimensões, pois um ponto da sombra projetada poderá corresponder mais de dois pontos da figura espacial.

Por último, as premissas da demonstração de Cauchy não condizem com os resultados observados na geometria clássica. Segundo Martines (2009) ela é identificável no campo da topologia, pois o processo de remoção de uma face do poliedro e o esticamento das arestas livres (bordas livres ocasionadas pela remoção da face) revela o caráter topológico da propriedade. Diferente da geometria projetiva para objetos de três dimensões ou espaciais, na topologia é sempre possível modificar um objeto, e depois refazê-lo, já que nesse tipo de transformação não há ruptura da superfície, como ao murchar uma bola é possível reconstituí-la. Por isso, há sentido dizer em transformações topológicas na demonstração da relação de Euler dada por Cauchy, visto que "as noções de Geometria Projetiva e Afim estão a meio caminho entre a topologia e a Geometria Euclidiana" (DIENES, 1975). Os resultados topológicos definitivos para a demonstração do teorema de Euler só foi dado em 1893, quando Henri Poincaré (1854-1912) reconheceu na "fórmula de Euler e suas generalizações como um dos teoremas centrais da topologia" (Courant-Robbins, 2000) ao notar que o número V-A+F, intitulada Característica de Euler-Poincaré, representa um invariante topológico comum as figuras que são homeomorfas, ou seja, uma figura que pode se transformar numa outra por uma transformação contínua e cuja inversa também é contínua. Logo, se todo sólido que inflado (considerando as faces desse sólido flexíveis) assumir o formato de uma esfera, então este sólido possui característica de Euler-Poincaré igual a dois. Os sólidos que não podem assumir esse formato (de esfera) ao serem inflados, não terão característica de Euler-Poincaré igual a 2, mas poderá ser algum número inteiro, conforme cita Lima (1991) em seu artigo. Assim, no campo da topologia, a deformação do poliedro, na demonstração de Cauchy, é justificável.

Considerações finais

Neste estudo, vimos que Cauchy tentou apresentar uma prova geral para a relação de Euler sobre poliedros, e assim acreditou ter afastado todas as dúvidas em torno da relação de Euler, procedendo com o mesmo rigor dedutivo da Geometria Clássica. Mas, utilizando-se de premissas não observáveis na geometria clássica. Este aspecto especial, da demonstração de Cauchy indica, quanto ao desenvolvimento histórico da matemática, que ela foi aceita pelos matemáticos do século XIX pelo fato de antes desse século já ter iniciado o questionamento da geometria clássica ou

[3] "É o estudo das propriedades das figuras que, traçadas em um plano a partir de uma fonte puntiforme, continuam invariantes" (DIENES, 1978, p. 6). A geometria projetiva é um ramo da geometria fundada por Jean-Victor Poncelet (1788-1867) ao divulgar, em 1822, a sua obra *Traité des propriétés projectives*.

euclidiana (no que se refere ao postulado das paralelas de Euclides), cujas discussões favoreceu o surgimento de geometrias diferentemente do da geometria euclidiana, como o aperfeiçoamento da geometria projetiva e o desenvolvimento da geometria não-euclidiana. Nesse contexto é que foi desenvolvida a demonstração de Cauchy.

Referências

BOYER, C.B.. **História da Matemática**. Revista por Uta C. Merzbach; tradução: Elza F. Gomide – 2° Ed.- São Paulo: Edgard Blüncher, 1996.

BLANCHÉ, R. **A Axiomática**. São Paulo/ Rio de Janeiro: Martins Fontes, 1978

COURANT, R.; ROBBINS, H.. **O que é Matemática?** Rio de Janeiro: Editora Moderna Ltda., 2000.

DIENES, Z.P. **A geometria pelas transformações - I Topologia, Geometria Projetiva e Afim**. Trad.: Maria P. B. M. Chalier e René F. J. Chalier, São Paulo, EPU. Brasília, INL, 1975.

EVES, H.. **História da Geometria**. Trad. Hygino H. Domingues, (Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula; v. 3). São Paulo: Atual, 1992.

LIMA, E.L.. **O Teorema de Euler sobre Poliedros**. In: Meu Professor de Matemática e outras Histórias - Coleção do Professor de Matemática, SBM; IMPA, 1991.

MARTINES, M.C.S. **Algumas observações sobre a característica de Euler: Uma Introdução de Elementos da História da Matemática no Ensino Médio.** Dissertação de mestrado. UNESP, Rio Claro/ SP: 2009.

TOMEI, C.. **Euclides - a conquista do espaço**. Ilustrador Libero Malavoglia – São Paulo: Odysseus Editora — (Imortais da Ciência/ coordenação Marcelo Gleiser) , 2003.